

Lausn rafstöðuverkefna

1

Grunnjöfnur rafstöðufræðinnar
í störsæu efni eru

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (1)$$

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \quad (2)$$

með jafnar skilyrðum sem við
höfum rætt

Vegna (2) er högt að finna
mætti

$$\bar{E} = -\nabla V \quad (3)$$

Ef högt er að skrifa

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad (4)$$

(ϵ má vera fall af staðarhitum)
má setja saman (1) og (4) + (3)
þ.a.

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho$$

í efni þar sem ϵ er fasti
fast

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (5)$$

Jafna Poissons með
Laplace virkjanum ∇^2

Í kerfi með engum frjálsum
hlöðslum lýsir jafna Laplace

$$\nabla^2 V = 0 \quad (6)$$

rafstöðumottinu V .

(5) og (6) eru hlutaftærujöfnur
fyrir "skalar" rafstöðumottid

þegar V er fundið er einfalt
að reikna rafsviðið

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Til eru margar aðferðir til (2)
að leysa jöfnur Poissons og
Laplace

Greiniaðferðir tölulegar

Green föll $\rightarrow$ heildisjöfnur
með innbyggðum
jafar skilyrðum

fallagrunnar $\rightarrow$ eiginföll virkja
Fourier, Laplace gr.
.....

Net + endanlegbütun

specilmyndir

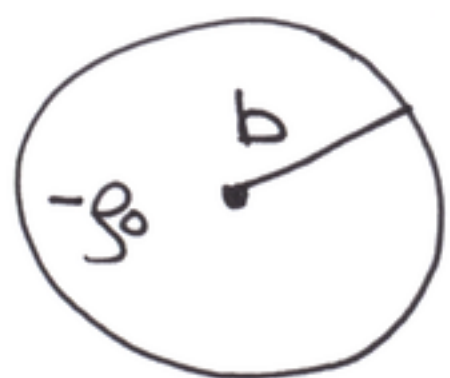
við stöðum aðeins notkrar
einfalldar aðferðir

Lesi 4-3 í bók um einkvæmni
lausna þessara jafna!

Dæmi

Reikna $\bar{E}$ utan og innan hlæðinnar kúlu
með geisla b og fastan hlæðslu þéttleika

$$\rho = \begin{cases} -\rho_0 & R \leq b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



Innan kúlu þarf að leysa jöfnu
Poissons og jöfnu Laplace utan
hennar

í kúluhnitum er
virki Laplace

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Hlæðslan hér er kúlsamhverf
→ rafstöðumættið getur
ekki verið háð hornunum
 $\Omega = (\theta, \phi)$ því skiptir
aðeins fyrsti liðurinn
máli hér

Innan Kúlu $R \leq b, \rho = -\rho_0$

$$\nabla^2 V_i = + \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

þá

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dV_i}{dR} \right) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

↓

$$\frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dV_i}{dR} \right) = R^2 \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

heildum öakveðid

$$R^2 \frac{dV_i}{dR} = \frac{1}{3} R^3 \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + C_1$$

þá

$$\frac{dV_i}{dR} = \frac{1}{3} R \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + \frac{C_1}{R^2}$$

Rafsvið $\bar{E}_i = -\nabla V_i$

(4)

$$\rightarrow \bar{E}_i = -\hat{a}_R \frac{dV_i}{dR}$$

Höðslan er jafudreift innan kúlu (engin punkthöðsla í miðju) $\rightarrow$ $\bar{E}_i$ getur ekki haft sérstöðupunkt í $R=0$

$$\rightarrow \underline{C_1 = 0}$$

því höfum við

$$\bar{E}_i = -\hat{a}_R \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R \quad R \leq b$$

Ein heildum í viðbót getur

$$V_i = \frac{1}{6} R^2 \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + C'_1$$

utan kúlu $R > b$

$$\nabla^2 V_0 = 0$$

eda

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dV_0}{dR} \right) = 0$$

↓

$$\frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dV_0}{dR} \right) = 0$$

Heildun gefur

$$R^2 \frac{dV_0}{dR} = C_2$$

eda

$$\frac{dV_0}{dR} = \frac{C_2}{R^2}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_0 &= -\bar{\nabla} V_0 = -\hat{a}_R \frac{dV_0}{dR} \\ &= -\hat{a}_R \frac{C_2}{R^2} \end{aligned}$$

með óþekktum fasta C_2 !

Hér er engin yfirbörðshleota
Svo rafsviðið er samfellt í $R=b$

$$|\bar{E}_i(b)| = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} b = \frac{C_2}{b^2} = |\bar{E}_0(b)|$$

$$\rightarrow C_2 = \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0}$$

eda

$$\begin{aligned} \bar{E}_0(R) &= -\hat{a}_R \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R^2}, \quad R \geq b \\ &= +\hat{a}_R \frac{\left(-\frac{4\pi}{3} b^3 \rho_0\right)}{4\pi\epsilon_0 R^2} \end{aligned}$$

(5)

fyrir mættit fast

$$V_0 = -\frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R} + C'_2$$

$$C'_2 = 0 \text{ því } \lim_{R \rightarrow \infty} V_0(R) = 0$$

Áður fengum við

$$V_i = \frac{1}{6} R^2 \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + C'_1$$

Rafstöðumættit er samfellt
í $R = b$

$$V_i(b) = \frac{\rho_0 b^2}{6\epsilon_0} + C'_1 = -\frac{\rho_0 b^2}{3\epsilon_0} = V_0(b)$$

⑥

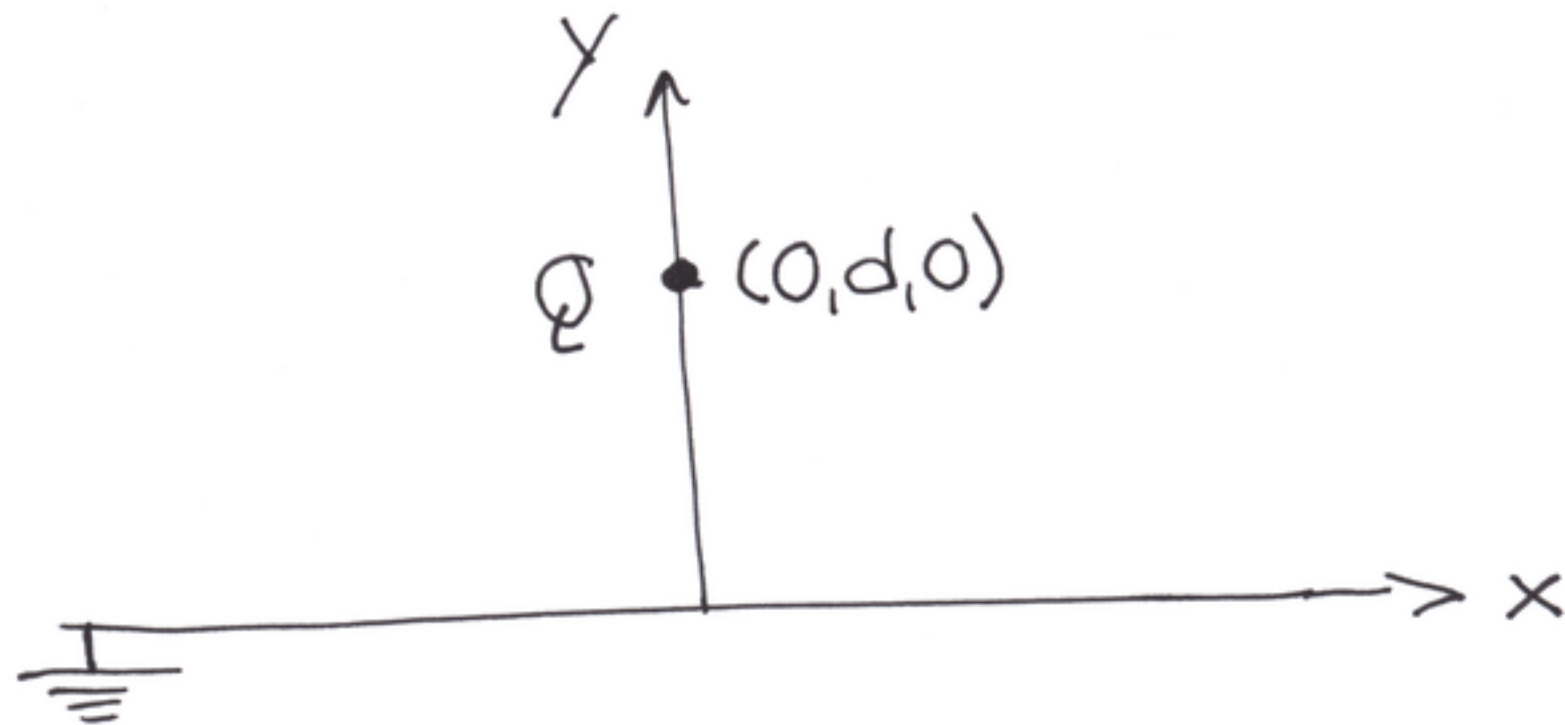
$$\rightarrow C'_1 = -\frac{\rho_0 b^2}{2\epsilon_0}$$

og þess vegna að lokum

$$V_i = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{3b^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right)$$

Adferd spegilhlöðslua

Athugum punkthlöðslu Q
yfir leidandi plötu með
0-spennu



punkt hlöðslan leiðir til yfirborðs-
hlöðslu á leidaranum S_z

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_s}{R_1} ds$$

| En f_s er óþekkt!

| Vit vitum

| * $V(x, 0, z) = 0$ (á leidaranum)

| * Nærrí punkt hlöðslunni gildir

$$V \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{p.} \quad R \rightarrow 0$$

| * Fjærri Q p. $x \rightarrow \pm \infty$
 $y \rightarrow +\infty$
 $z \rightarrow \pm \infty$

| vendar $V \rightarrow 0$

* Samhverfur

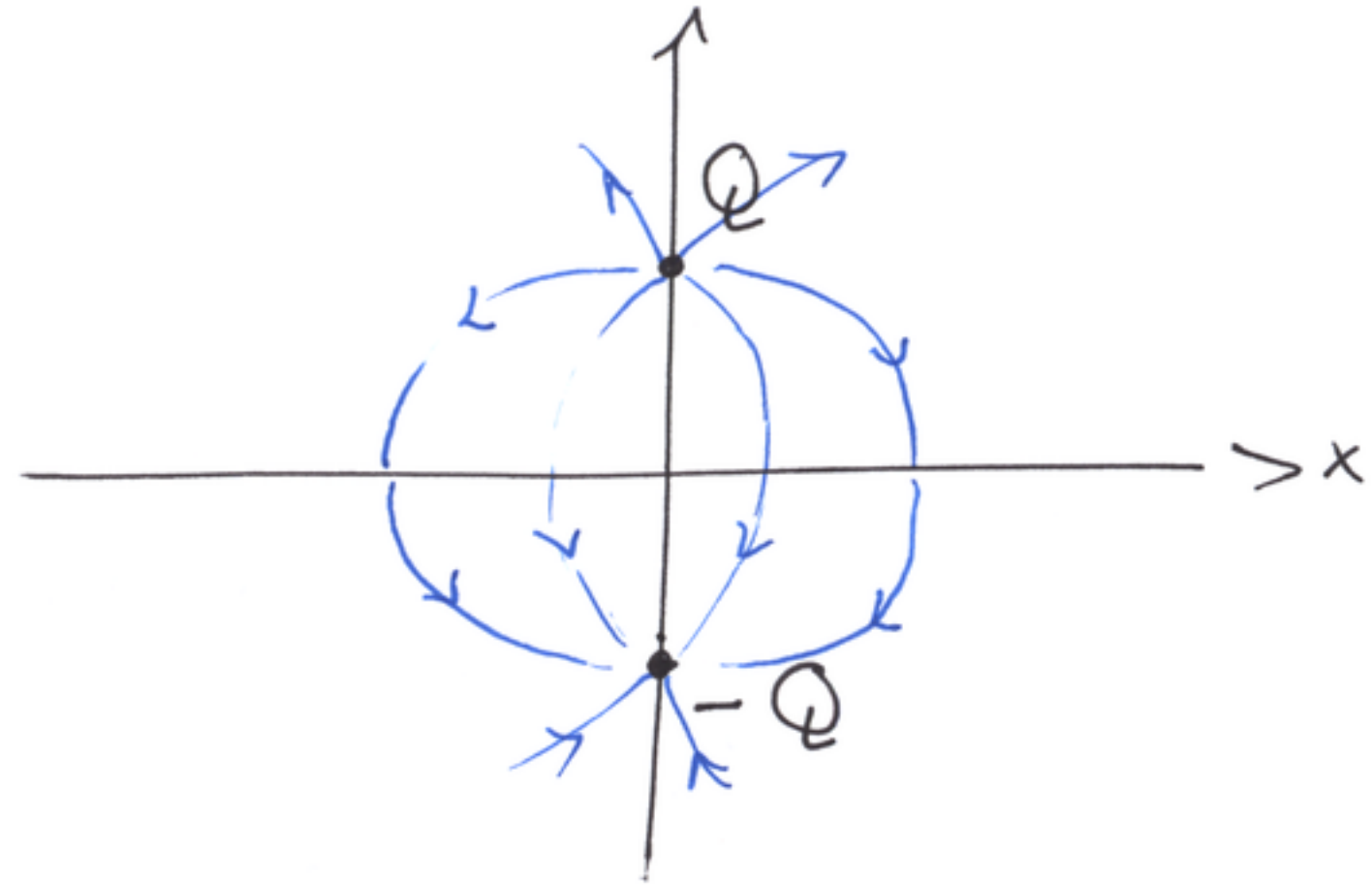
$$V(x, y, z) = V(-x, y, z)$$

$$V(x, y, z) = V(x, y, -z)$$

* Við leitarann verður $\vec{E}$ að vera hornrétt á hann

Lausn

Kippa leitaraplötu í burtu og bætta við spegil hleðslu



fyrir $y > 0$

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right)$$

með

$$R_+ = [x^2 + (y-d)^2 + z^2]^{1/2}$$

$$R_- = [x^2 + (y+d)^2 + z^2]^{1/2}$$

Hægt er að sýna að
 $V(x, y, z)$ uppfyllir
jöfnu Laplace og
öll skilyrðin sem
við nefndum

+ Einkuæmni lausna



Við höfum rétta lausu

9
* Spegil hleðslan er utan
þess svæðis sem við viljum
leysa jöfnuna á

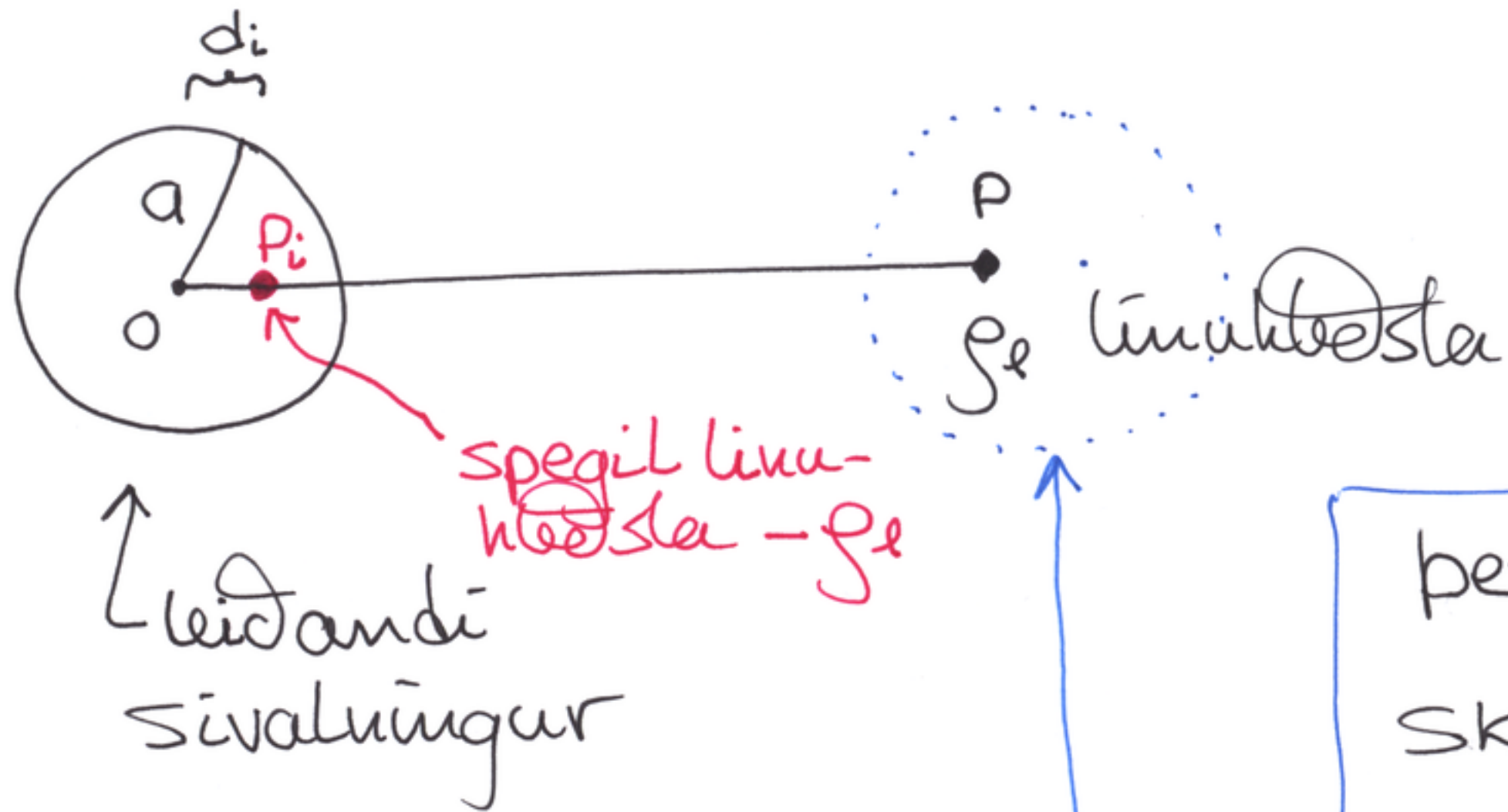
* Nú er einfallt að reikna
 $\bar{E}$ og ρ_s

* Lausnin gildir aðeins
fyrir $y > 0$

{ yfirborðs hleðslan krefst stökks
(ösamfelli) í $\bar{E}$ í yfirborðinu.
Við höfum ekki reynt að ná
því $\rightarrow$ aðeins lausa f. $y > 0$ }

Línuklésta + Sivalningur

10



Þessi spegil línuklésta
skapar jafuspennu flöt
þar sem sivalningurinn
var

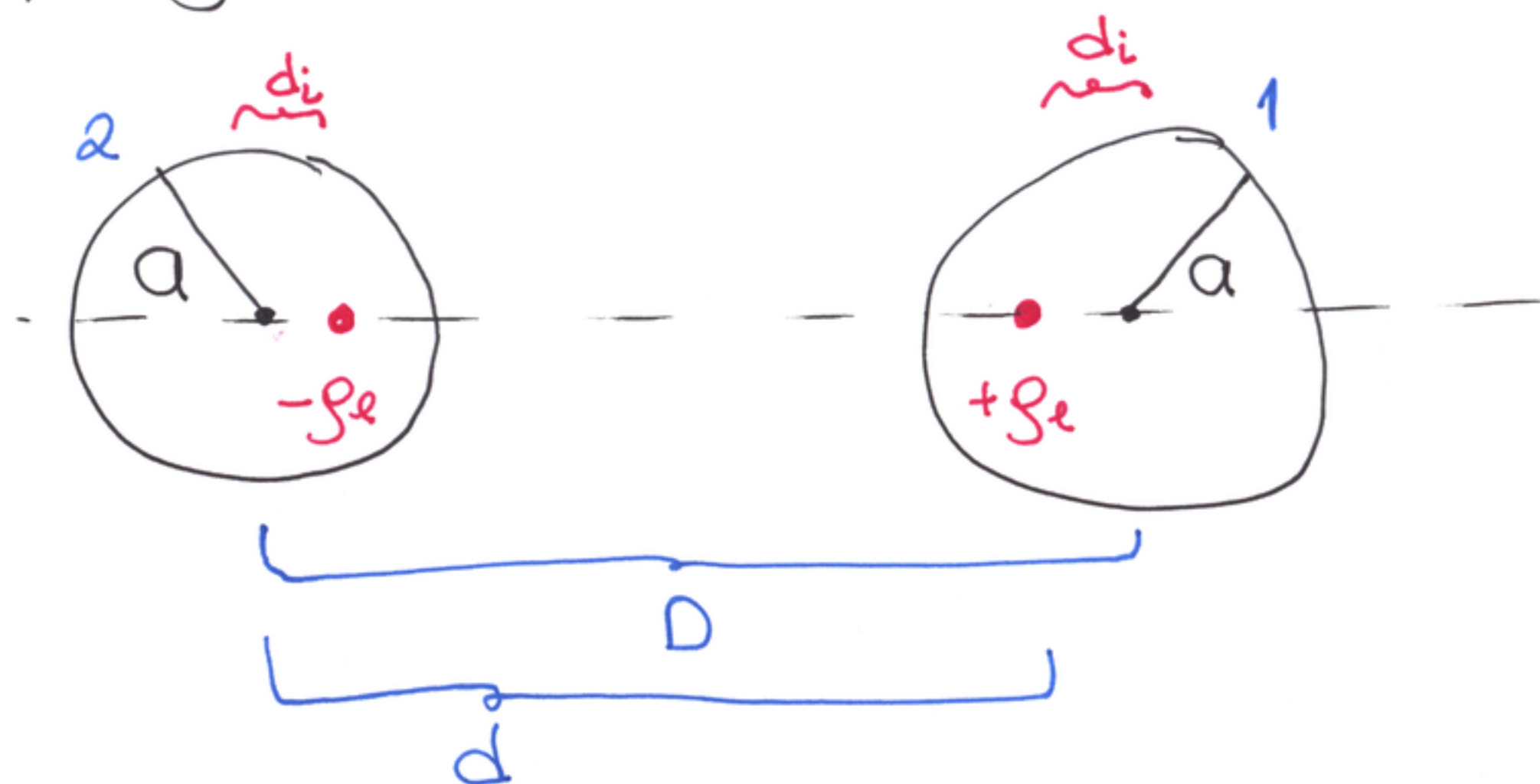
Í bók er sýnt að um
spegil klésluna verður
að gilda

$$f_i = -f_e, \quad d_i = \frac{a^2}{d}$$

+
Einnig verður til jafuspennu-
flötur um f_e með miðju
klésta um d_i frá f_e þá
fyrri sivalningi

Þvi getum við skoðar tvær línur

11



$$V_2 = \frac{q_e}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{d}\right)$$

$$V_1 = -\frac{q_e}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{d}\right)$$

↑

leit út á bls.
163-4

Í stað jafn spennuflata leitaranna
koma spegilhlöðurnar $\pm q_e$
í fjarlægð $(D - 2d_i) = (d - d_i)$
frá hvor annarri

$$a < d \rightarrow \ln\left(\frac{a}{d}\right) < 0$$

og rýmd á lengdareiningu

$$C = \frac{Q_l}{V_1 - V_2} = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln(d/a)}$$

Nú gildir $d = D - d_i = D - \frac{a^2}{d}$

$$\rightarrow d = \frac{1}{2} \left(D + \sqrt{D^2 - 4a^2} \right)$$

steppum - lausninni
því $D, d \gg a$

$$C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \left\{ \frac{D}{2a} + \sqrt{\left(\frac{D}{2a} \right)^2 - 1} \right\}}$$

eda

$$C = \frac{\pi \epsilon_0}{\text{Arcosh} \left(\frac{D}{2a} \right)}$$

p.s.

$$\text{Arcosh}(x) = \ln \left\{ x + \sqrt{x^2 - 1} \right\}$$