

Jöfnur Maxwells

Höfum tengt $\vec{E}$ og $\vec{B}$

með

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Jafnan $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$ uppfyllir
ekki varðveisluhlutur

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

En $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ gildir ekki almennt
heldur

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

þú er blett við líð

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

það

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Tilraunir sýna að
nú erum við kominn
með fullkomnið
satu jafna

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho,$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Jöfnur
Maxwells

sem á helldis formi verða

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt},$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Mottisföll

3

I segulstöðufræði var $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ notað t.p.a.

finna vigrumotti $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Þessi jafna er óbreytt fyrir tímaháð svið

→ Höldum $\vec{A}$ p.a. $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Athugum í lögmáli Faraday =

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\rightarrow \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) \rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Því er hægt að finna skalarmotti p.a.

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

Vit veljum V þannig
til þess að fyrir
tímaóháð svið
fáist aftur
 $\vec{E} = -\nabla V$

því fast

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

því er tímaháð $\vec{E}$ ekki einungis vegna hleðslu í gegnum
 $-\vec{\nabla}V$ heldur einnig vegna breytilegs segulflæðis í gegnum
 $-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$

því er ólíklegt að jöfnurnar

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho}{R} dv' \quad \text{og} \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}}{R} dv'$$

haldi nema fyrir notum tíma óháð svið

(þessi svið eru lausnir jöfnu Poisson, sem er óháð tíma)

5
Leitum þú jafna fyrir $\bar{A}$ og V sem uppfylla
Jöfnur Maxwells

Byrjum með

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t} \bar{D}$$

Notum fyrst $\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu}$ og $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$

og gerum ráð fyrir
einsleitu efni
 μ og ϵ eru þá
fastar

$$\rightarrow \bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu \bar{J} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \bar{E}$$

Síðan líka

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A} \quad \text{og} \quad \bar{E} = -\bar{\nabla} V - \frac{\partial}{\partial t} \bar{A}$$

$$\rightarrow \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{A} = \mu \bar{J} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\bar{\nabla} V - \frac{\partial}{\partial t} \bar{A} \right)$$

Notum

$$\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$$

og fæum

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} = \mu \bar{J} - \nabla\left(\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{A} \quad (*)$$

Til þess að ákvörða vigur $\bar{A}$ þarf bæði að ákvörða

$\nabla \cdot \bar{A}$ og $\nabla \times \bar{A}$ (Langs- og þverþátt $\bar{A}$)

Við höfum $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$

Ákvörðun langs þáttinn sem

$$\nabla \cdot \bar{A} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} V = 0$$

þá verður (*)

$$\textcircled{1} \quad \nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{A} = -\mu \bar{J}$$

Hlutf. bylgjufara
fyrir $\bar{A}$

Kvadratsi....

Lorentz kvadrati

margir öðrir möguleikar til

Byrjum nú með

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{og} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

og

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \rightarrow \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \rightarrow -\vec{\nabla} \cdot \epsilon \left(\vec{\nabla} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \rho$$

$$\rightarrow \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Notum nú Lorentz kvörðun $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} V$

$$\rightarrow \textcircled{2} \quad \nabla^2 V - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Hliðræð bylgjujafna
fyrir V

Hliðræð bylgjujöfnur ①+② á kvörðun $\vec{A}$ og V

frá jöfnum Maxwells mæ finna þrjár skilyrðin

8

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\hat{a}_{n2} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s$$

$$\hat{a}_{n2} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

EKKI óháð skilyrði

jafngildar

jafngildar

Tveir rafsvæðar með

$$\rho_s = 0, \quad \bar{J}_s = 0$$

Ekki ortu tap

$$E_{1t} = E_{2t} \rightarrow \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

$$H_{1t} = H_{2t} \rightarrow \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Rafsvæði

①

$$E_{1t} = 0$$

$$\hat{a}_{n2} \times \bar{H}_1 = \bar{J}_s$$

$$\hat{a}_{n2} \cdot \bar{D}_1 = \rho_s$$

$$B_{1n} = 0$$

Kjörbúðari

②

$$E_{2t} = 0$$

$$H_{2t} = 0$$

$$D_{2n} = 0$$

$$B_{2n} = 0$$

⑨

Lausnir bylgjujafna

Veljum punkt hléðslu $\rho(t) \Delta V'$

í miðri kúluhnita keðfi.

utan miðju gældir

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

Rámið er einfalt, punkt hléðslan
leiðir til kúlu samhverfu.

Eugín átt er sérstakur en
önnur

um mynstur

$$V(R, t) = \frac{1}{R} U(R, t)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

Einnvörð bylgjujafna

Almennu lausnirnar eru

öll tvídrifjanleg föll
af $(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$ og $(t + R\sqrt{\mu\epsilon})$

Við sjáum rétt bráttum að
eðlisfræðilega lausnir er

$$U(R, t) = f(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$$

$$U(R+\Delta R, t+\Delta t) = f(t+\Delta t - (R+\Delta R)\sqrt{\mu\epsilon'}) = f(t - R\sqrt{\mu\epsilon'})$$

$$\rightarrow \text{ef } \Delta t = \Delta R \sqrt{\mu\epsilon'} = \Delta R / u$$

$$\rightarrow \Delta R = u \Delta t$$

$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ er
útbreiddshraði
bylgjunnar

Þrívíða jafnan hefur lausnina

$$V(R, t) = \frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{u}\right)$$

Hefði punkt hvarslan verið óháð tíma hefði fengið
lausu

$$\Delta V(R) = \frac{\rho \Delta v'}{4\pi\epsilon R}$$

Samantburður við lausu bylgjujöfnunar getur þú

(12)

$$\Delta f(t - \frac{R}{u}) = \frac{\rho(t - \frac{R}{u}) \Delta v'}{4\pi\epsilon}$$

og almennu lausurver eru

$$V(R, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(t - \frac{R}{u})}{R} dv'$$

$$\bar{A}(R, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\bar{J}(t - \frac{R}{u})}{R} dv'$$

~~Seinkuð lausur~~ bylgju jafnanna í seinketu rúmi
(bylgja berst út eftir breytingu uppsprettu) við hertum
öðlisfræðilegu flýttu lausum